

National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

- 1. a.** On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2
 $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intercalés.

- 2.** Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

- 3.** Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

- 4. a.** L'algorithme affiche 20 puis 4.

b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N , tel que $u_N = 1$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 1$. De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M , les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.

Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.

c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1$ et $u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.

d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

- 5. a.** Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :

$$x - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$

Le terme $a(100 - a)$ est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.

Le terme $b(10 - b)$ est positif.

Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$

On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier.

b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante... Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.

La propriété \mathcal{P} est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

- 6. a.** Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p \geq 4, 9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1$ (on fait apparaître $10^{p-1} - 1$)

On peut écrire $10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \dots + 10^1 + 1) + 1$

Dans la parenthèse se trouvent $p - 4$ entiers supérieurs à 1, dont $p - 3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10(p - 3) + 1$. Finalement $10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1 \geq 100p - 289$. Ce dernier terme est supérieur à $9p$ dès que $p > 3$.

b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.

c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété \mathcal{P} est vraie.