Indications pour le professeur

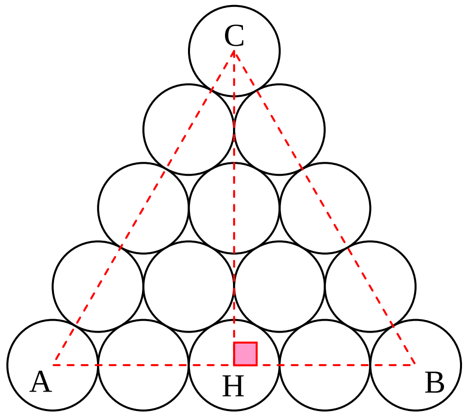
Nombre de boulets : $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 =$ **55**

Hauteur d'une pyramide à base carrée...

Étape 1 : 1 boulet et la hauteur de la pyramide vaut 12 cm.

Étape 2 : $1 + 2^2 = 5$ billes et $\ell_2 = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ et $(h_2)^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 6^2 = 72 = 36 \times 2$, d'où $h_2 = 6\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide est donc $H_2 = 6\sqrt{2} + 12$ soit environ 20,49 cm.

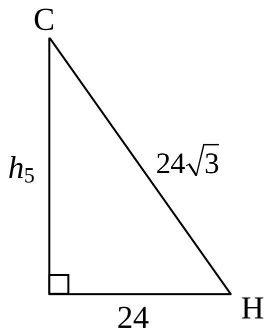
Étape 5 : 55 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 ; la base de la pyramide est donc constituée de 25 boulets et a 5 "étages" avec 4 ***faces latérales*** comme ci-contre…



Considérons le triangle ABC obtenu en joignant les centres des boulets aux "extrémités" : ce triangle est équilatéral de côté 4 diamètres c'est-à-dire 48 cm et donc la hauteur CH vaut :

$$\ell_5 = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}$$

Considérons maintenant la pyramide en coupe comme ci-dessous (le plan de coupe est le plan perpendiculaire à la base passant par les points C et H) :



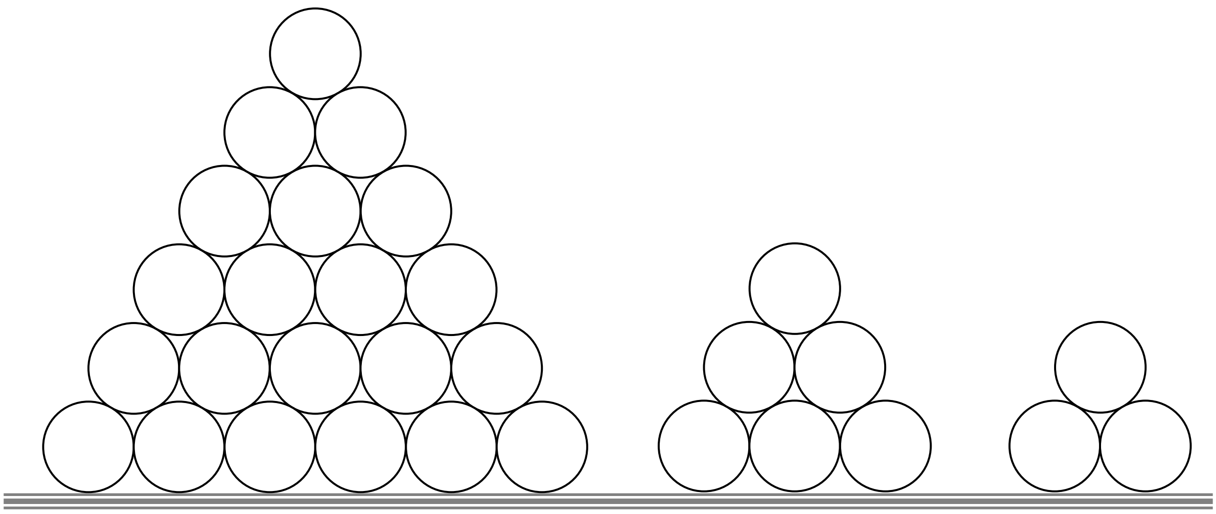
On a : $(h_5)^2 = \left(24\sqrt{3}\right)^2 - 24^2 = 1728 - 576 = 1152 = 3^2 \times 8^2 \times 2$,

d'où : $h_5 = 24\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide vaut donc $H_5 = 24\sqrt{2} + 12$ c'est-à-dire environ 45,94 cm.

Au rang n, on aura : $\ell_n = (n-1) \times 12 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6(n-1)\sqrt{3}$

$(h_n)^2 = \left(6(n-1)\sqrt{3}\right)^2 - \left(6(n-1)\right)^2 = \left(6(n-1)\right)^2 \times 2$ et donc la hauteur de la pyramide est $H_n = 6(n-1)\sqrt{2} + 12$

En utilisant l'intégralité de 110 boulets, il n'est pas possible d'obtenir deux pyramides à base carrée de tailles différentes ; en effet : 36 + 55 = 91 mais 110 – 91 = 19 et il n'existe pas de pyramide à base carrée utilisant 19 boulets… Par contre il est possible d'obtenir trois pyramides à base carrée de tailles différentes car : 110 = 91 + 14 + 5



91 boulets
$[36+25+16+9+4+1]$

14 boulets
$[9+4+1]$

5 boulets
$[4+1]$

Nombres pyramidaux :

a) **1**, **5**, **14**, **30**, 55, **91**, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015 et 1240.

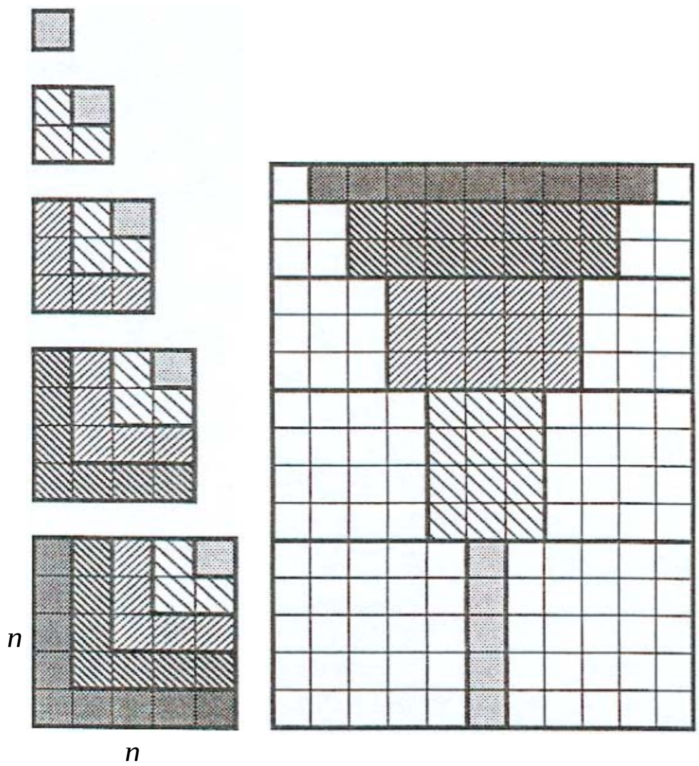
b) Le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal carré est égal au cumul des carrés des n premiers entiers, c'est à dire à la somme des carrés des n premiers entiers successifs (autre que 0) ; par exemple : $30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$

c) Le $n^{\text{ième}}$ de ces nombres est égal à son prédécesseur, le $(n-1)^{\text{ième}}$, plus le carré du $n^{\text{ième}}$ nombre entier non nul ; par exemple, le $4^{\text{ème}}$ de ces nombres est 30 et on a bien : $30 = 14 + 4^2 = 14 + 16$.

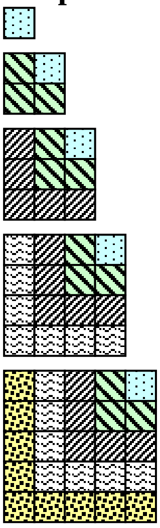
$$\mathbf{Pycar}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

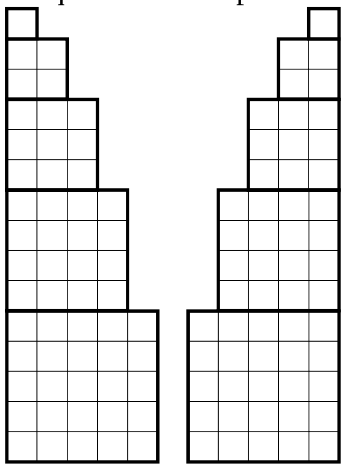
Indications pour les élèves voulant aller "plus loin" :

Examinez à nouveau les puzzles de la fiche I ainsi que le nouveau puzzle ci-contre… ils devraient à eux deux vous aider à déterminer une formule permettant de **déterminer le *n*ième nombre pyramidal carré en fonction de *n*…**



Clé pour comprendre le puzzle et sans doute donner un coup de main aux élèves qui n'auraient pas une aussi "bonne vue" que l'auteur du puzzle…





Les 5 carrés en couleur sur le côté se retrouvent à deux endroits, tels quels, dans le rectangle : "colonne" de droite et "colonne" de gauche (cf. ci-contre).

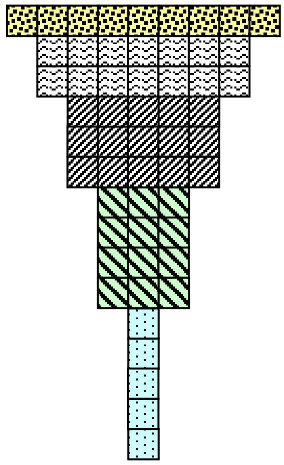
On les retrouve encore une fois "colonne centrale", en effet avec ces 5 carrés on a : 1 fois 9,

2 fois 7,

3 fois 5,

4 fois 3,

5 fois 1



En les empilant ainsi, on obtient bien la "pyramide centrale (cf. ci-contre)…

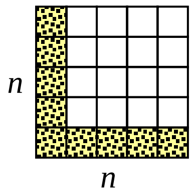
Le rectangle est donc constitué de 3 fois les carrés sur le côté et donc on a :

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{(9+2)\times(1+2+3+4+5)}{3}$$

$$=\frac{11\times 15}{3}=55$$

Et ce procédé est parfaitement généralisable :

Avec n carrés, le dernier ayant comme côté n, les carrés en couleur représenteront le nombre impair $n+n-1$, c'est-à-dire $2n-1$, le rang supérieur représentant $2n-3$, etc. et on aura :



1 fois $2n - 1$,

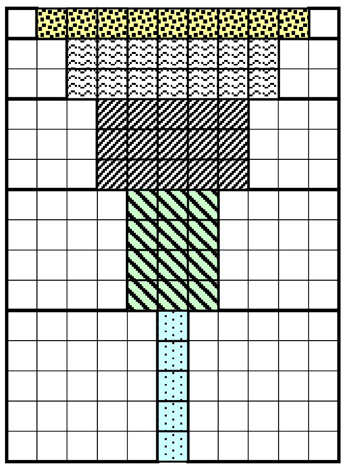
2 fois $(2n - 3)$,

--- / ---

$(n - 2)$ fois 5,

$(n - 1)$ fois 3,

n fois 1



d'où :

$$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\frac{(2n-1+2)\times(1+2+3+\cdots+n)}{3}=\frac{(2n+1)\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✎ vérification pour $n = 1$, $n = 2$, etc.

Et pour $n = 2007$, **Pycar**$_{2007}=\dfrac{2007\times 2008\times 4015}{6}=2\,696\,779\,140$.