

**CLASSES DE PREMIERES GENERALES  
ET TECHNOLOGIQUES**

**OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES  
Académie de MONTPELLIER  
Session 2008**

**Durée : 4 heures**

**Séries L, ES, Technologiques**

*Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

*La rédaction et la qualité des raisonnements ainsi que la prise d'initiatives  
seront prises en compte.*

## Exercice 1 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

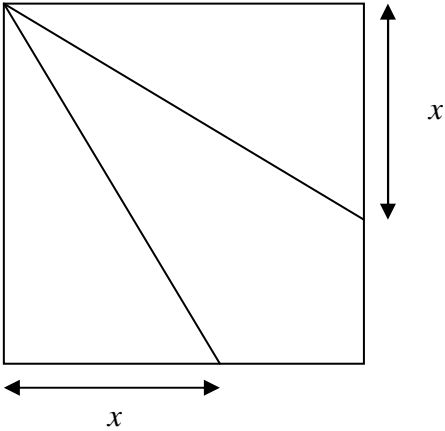
$2 = 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$ , donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

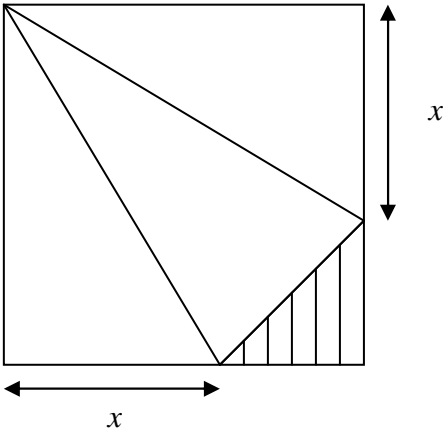
$3 = 1 + 2$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$  ;  $3 = 1 + 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$  ; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

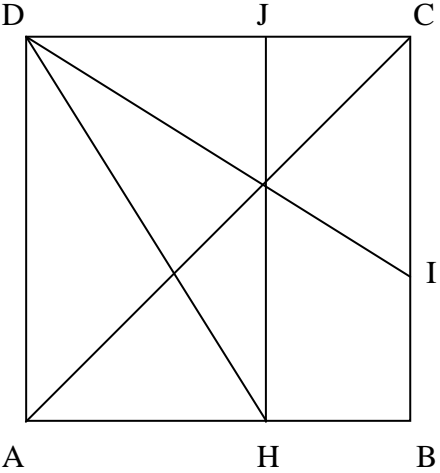
1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si  $n$  est « bon », alors  $2n + 2$  et  $2n + 9$  sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».  
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

**Remarque** : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature*, n°3, avril 1990.

## Exercice 2 : Un partage équitable

	<p>1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.</p> <p>Quelle valeur doit-il donner à <math>x</math> pour arriver à ses fins ?</p>
---	---

	<p>2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.</p> <p>Peuvent-elles avoir la même aire ?</p>
--	---

	<p>3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).</p> <p>Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.</p> <p>Qu'en est-il ?</p>
---	---

### Exercice 3 : Coktails

On dispose de trois récipients A, B et C de 2 litres chacun.

Le récipient A contient un litre d'un cocktail constitué de 60% de jus d'ananas et de 40% de jus de banane.

Le récipient B contient un litre d'un cocktail constitué de 40% de jus de banane et de 60% de jus de mangue.

Le récipient C contient un litre d'un cocktail constitué de 20% de jus d'ananas, de 10% de jus de banane et de 70% de jus de mangue.

On effectue deux manipulations successives :

1<sup>ère</sup> manipulation : On verse la moitié du cocktail contenu dans le récipient A dans le récipient B et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

2<sup>ème</sup> manipulation : On verse alors un tiers du mélange obtenu dans le récipient B dans le récipient C et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

1) A l'issue de ces deux manipulations :

Quel est le volume de jus de fruits contenu dans chaque récipient ?

Quel est la proportion de jus d'ananas, de jus de banane et de jus de mangue dans chaque récipient ?

2) A l'issue de ces deux manipulations, quelle proportion du mélange contenu dans le récipient B et quelle proportion du mélange contenu dans le récipient C faut-il verser dans le récipient A pour que dans le récipient A, il y ait autant de jus d'ananas que de jus de banane que de jus de mangue?

## Exercice 4 : Mini-sudoku

Dans le mini-sudoku, on complète une grille formée de 4 carrés 2x2 avec les chiffres 1, 2, 3, 4 de telle façon que, sur chaque ligne, chaque colonne et dans chacun des 4 carrés 2x2, il n'y ait qu'une seule fois chaque chiffre.

Exemple :

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1	2	3	4
<i>B</i>	3	4	1	2
<i>C</i>	2	1	4	3
<i>D</i>	4	3	2	1

1) Résoudre le problème ci-dessous, c'est-à-dire compléter la grille en respectant les règles du mini-sudoku. Expliquer le raisonnement.

*On pourra utiliser la notation naturelle des cases pour expliquer le raisonnement. Par exemple, Aa désigne la case contenant le 1 déjà placé, la ligne B contient le 2 déjà placé et la colonne b contient le 3 déjà placé, enfin le carré CDcd contient le 4 déjà placé.*

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1			
<i>B</i>			2	
<i>C</i>		3		
<i>D</i>				4

2) Si on retire le chiffre 4 du tableau de la question 1), on obtient le tableau ci-dessous ; déterminer les cases dont le remplissage reste imposé.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1			
<i>B</i>			2	
<i>C</i>		3		
<i>D</i>				

3) Démontrer que si on retire un quelconque des 4 chiffres du tableau de la question 1), le problème admet alors toujours 3 solutions et 3 seulement.