

Académie de Montpellier et Maroc

# Olympiades de mathématiques

Classes de première des

Séries NON S

Durée : 4 heures

*Ce sujet comporte quatre exercices indépendants et cinq pages numérotées de 1 à 5.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

*La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.*

*Toute initiative, même infructueuse, pourra également être prise en compte.*

## Exercice 1 (national) :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est digisible car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est digisible car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas digisible car il n'est pas divisible par 3.

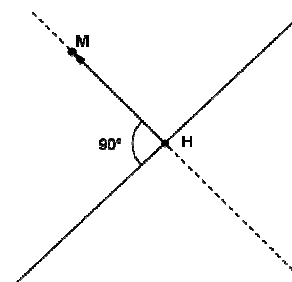
*On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.*

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre digisible à quatre chiffres.
3. Soit  $n$  un entier digisible s'écrivant avec un 5.
  - a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
  - b) Démontrer que tous les chiffres de  $n$  sont impairs.
  - c) Démontrer que  $n$  s'écrit avec au plus quatre chiffres.
  - d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit  $n$  un entier digisible quelconque.
  - e) Démontrer que  $n$  s'écrit avec au plus sept chiffres.
  - f) Si  $n$  s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de  $n$ .
  - g) Déterminer le plus grand entier digisible.

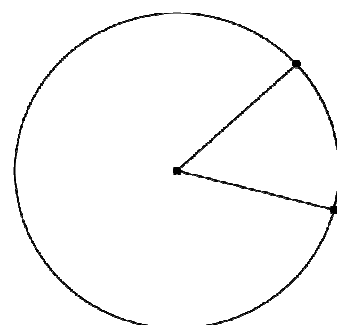
## Exercice 2 (national) :

### Rappels

- On appelle **distance entre un point  $M$  et une droite  $(D)$**  la distance  $MH$ , où  $H$  est le point d'intersection de  $(D)$  avec la droite perpendiculaire à  $(D)$  passant par  $M$ .



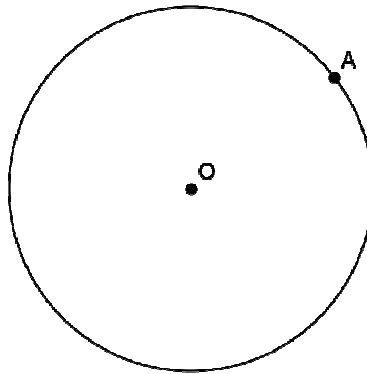
- Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est  $R$ , et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure  $\alpha$  (exprimée en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut  $\frac{\pi\alpha R^2}{360}$ .



Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point  $M$  à un segment  $[BC]$  comme étant la distance du point  $M$  à la droite  $(BC)$ .

### Partie I

Soit  $C$  un cercle de centre  $O$ ,  $A$  un point de ce cercle et  $D$  le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de  $O$  et de  $A$ .
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de  $O$  que de  $A$ .
3. Soit  $M$  un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque  $D$ .

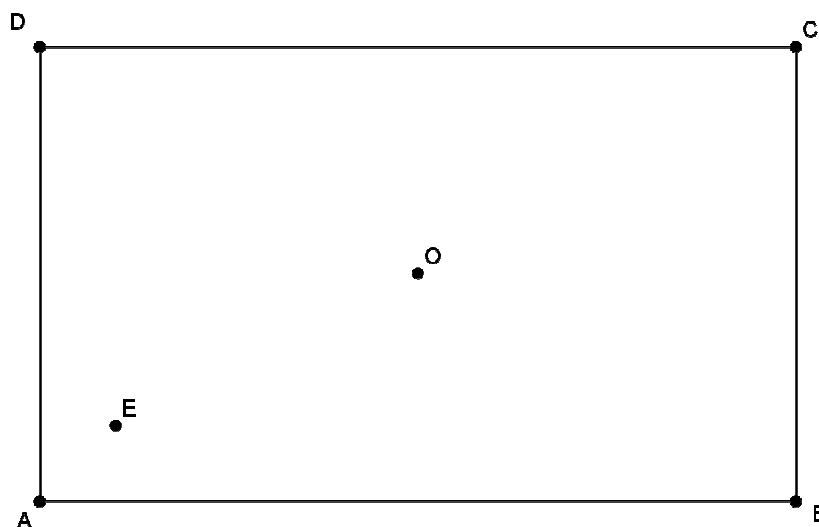
Quelle est la probabilité que  $M$  soit plus proche de  $O$  que de  $A$  ?

### Partie II

Soit  $ABCD$  un rectangle de longueur  $AB = 20$  cm et de largeur  $BC = 12$  cm, de centre  $O$ .

Soit  $E$  un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de  $A$ , à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit  $M$  un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle  $ABCD$ .



1. Quelle est la probabilité que  $M$  soit plus proche du côté  $[BC]$  que du côté  $[AD]$  ?

- a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
  - b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
  - c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
2. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
  3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
  4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

### Exercice 3 (académique) : Parlons le MIU.

Dans le jeu suivant, on appelle *mot* une suite de lettres ou chaîne de caractères.

Les *mots* que nous allons considérer n'utilisent que les trois lettres M, I et U, autant de fois que l'on veut (IMUUIIM est un tel mot).

Le but du jeu est de fabriquer des *mots* nouveaux à partir du seul *mot* MI.

Pour cela, il y a quatre règles, et quatre seulement, qui permettent d'agrandir la collection de *mots* :

**R<sub>1</sub>** : Si vous possédez un *mot* se terminant par I, vous pouvez lui rajouter un U à la fin.

Par exemple, avec MI vous pouvez faire MIU.

**R<sub>2</sub>** : Si vous avez un *mot* de la forme Mx où x représente n'importe quelle chaîne de caractères jusqu'à la fin du *mot*, vous pouvez faire le mot Mxx.

Par exemple, avec MIU vous pouvez faire MIUIU et avec MI vous pouvez faire MII.

**R<sub>3</sub>** : Si dans un *mot* vous avez III (trois fois la lettre I) vous pouvez remplacer ce III par U et inversement U par III.

Par exemple avec UIIIM vous pouvez faire UUM ou IIIIIM.

**R<sub>4</sub>** : Si dans un *mot* vous avez UU à n'importe quel endroit du *mot* vous pouvez supprimer ce UU.

Par exemple avec MIMUU vous pouvez faire MIM.

Vous pouvez appliquer ces règles dans l'ordre de votre choix.

1. Montrez qu'on peut fabriquer le *mot* MUIUI (indiquer soigneusement les étapes suivies avec les numéros des règles utilisées).
2. Montrez qu'on peut fabriquer le mot MUIIU (indiquer soigneusement les étapes là aussi)
3. Peut-on fabriquer le mot MU ? Si non, pourquoi ?

En tous cas, aMIUsez vous bien !

### Exercice 4 (académique) : Quitte ou double.

Dans la suite des entiers positifs ci-dessous :

1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19,...

les entiers qui sont absents, à savoir les nombres 2, 6, 8, 10, 14, 18, ..., sont exactement les doubles de ceux qui sont présents.

1. a. Montrez que les nombres impairs sont tous présents dans la suite.  
b. Montrez que les nombres de la forme  $2 \times I$  où  $I$  est un nombre impair sont tous absents de la suite.  
c. Montrez que les nombres de la forme  $4 \times I$  où  $I$  est un nombre impair sont tous présents dans la suite.  
d. Que pouvez-vous dire des nombres de la forme  $8 \times I$  ? de la forme  $16 \times I$  ?
2. On cherche la quantité de nombres inférieurs à 100 dans la suite en complétant le tableau suivant :

Présents	De ... à ...	Nombre de termes
impairs	de 1 à 99	50
les $4 \times I$	de $4 \times 1$ à $4 \times 25 (=100)$	?
les $16 \times I$	?	?
les $64 \times I$	?	?
	Total	

3. Procédez de manière semblable pour trouver le 2012-ème nombre de la suite.