



Statistiques et probabilités en première

Un programme qui s'inscrit dans la continuité de celui de seconde

marqué essentiellement par l'introduction de la **répétition d'expériences identiques indépendantes et de l'épreuve puis du schéma de Bernouilli.**

Contenu

Très peu de différences entre les programmes des sections ES, L et S

En plus en S :

- variance et écart type d'une variable aléatoire et démonstration des propriétés de l'espérance et la variance ;
- situations autour de la loi géométrique tronquée ;
- triangle de Pascal et propriété d'additivité des coefficients binomiaux ;
- la représentation graphique d'une loi binomiale est une capacité attendue en S et seulement utilisée en ES.

Des différences significatives avec ce qui était fait en terminale antérieurement

Les situations de répétition d'une même expérience aléatoire, reproduite dans des conditions identiques constituent un élément fort du programme de Première.

mais :

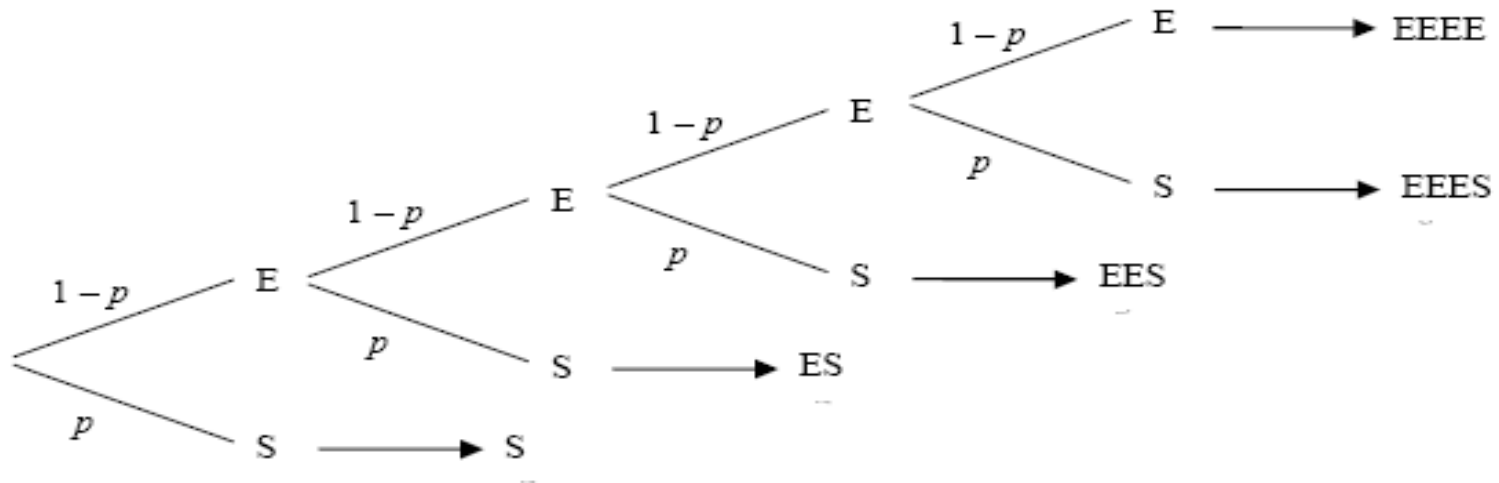
- la notion de probabilité conditionnelle est hors programme ;
- on s'appuie sur la représentation en arbre pour mettre en place la propriété « de multiplication des probabilités » sur les branches.

Loi géométrique tronquée (en **S** seulement)

Son introduction présente de nombreux avantages :

- travailler des répétitions d'une épreuve de Bernoulli ;
- envisager ces répétitions sous l'angle algorithmique ;
- présenter une situation d'arbre pour lequel tous les chemins n'ont pas la même longueur ;
- exploiter hors de l'analyse les propriétés des suites géométriques ;
- exploiter hors du cadre habituel des résultats relatifs à la dérivation ;
- travailler les variables aléatoires.

Définition de la loi géométrique tronquée (en S seulement)



Répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p avec arrêt au premier succès, et loi de la variable aléatoire X « succès à l'étape k »

Remarque : loi géométrique, on s'arrête au premier succès

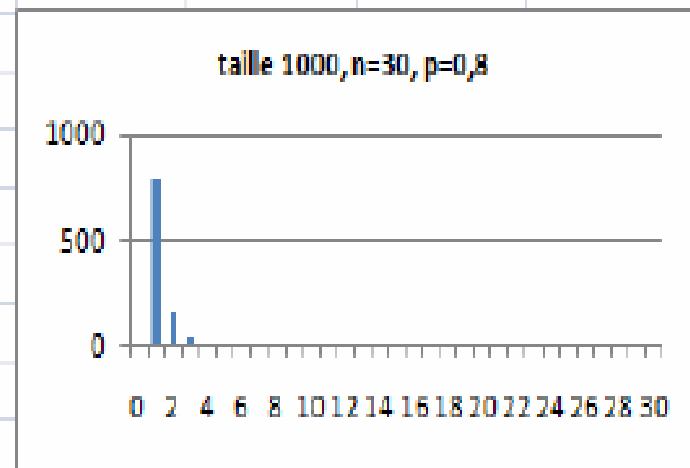
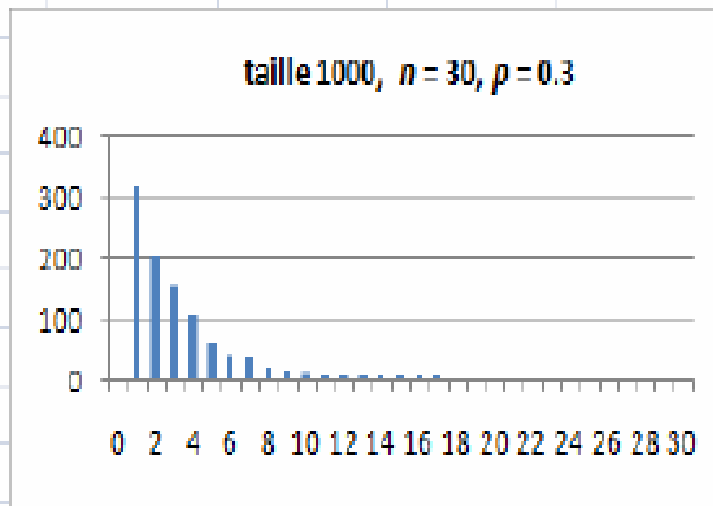
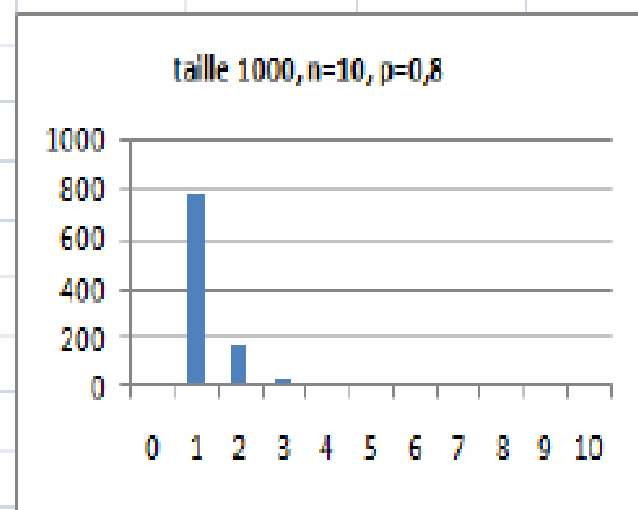
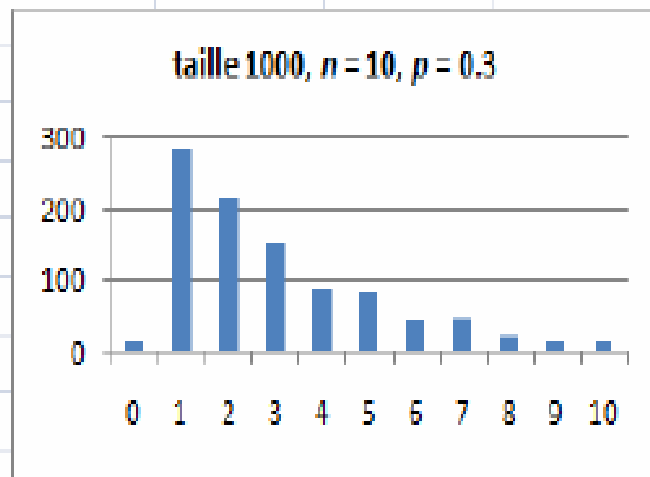
Expression de la loi géométrique tronquée (en **S** seulement)

L'arbre permet de déterminer la loi de la variable aléatoire X décrite ci-dessus, c'est-à-dire la loi géométrique tronquée de paramètres n et p , où n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

- si aucun succès n'a été obtenu, $X = 0$ et $P(X = 0) = (1 - p)^n$;
- pour $1 \leq k \leq n$, le premier succès est obtenu à l'étape k pour le chemin qui présente dans l'ordre $k - 1$ échecs et un succès, d'où : $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.

On vérifie facilement que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$ (exploitation des sommes de suites géométriques).

Simulations et représentations graphiques (en S seulement)



Un exemple (en S seulement)

Énoncé

Pour limiter le nombre de filles dans un pays (imaginaire ?), on décide que :

- chaque famille aura au maximum 4 enfants ;
- chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.

On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents.

Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?

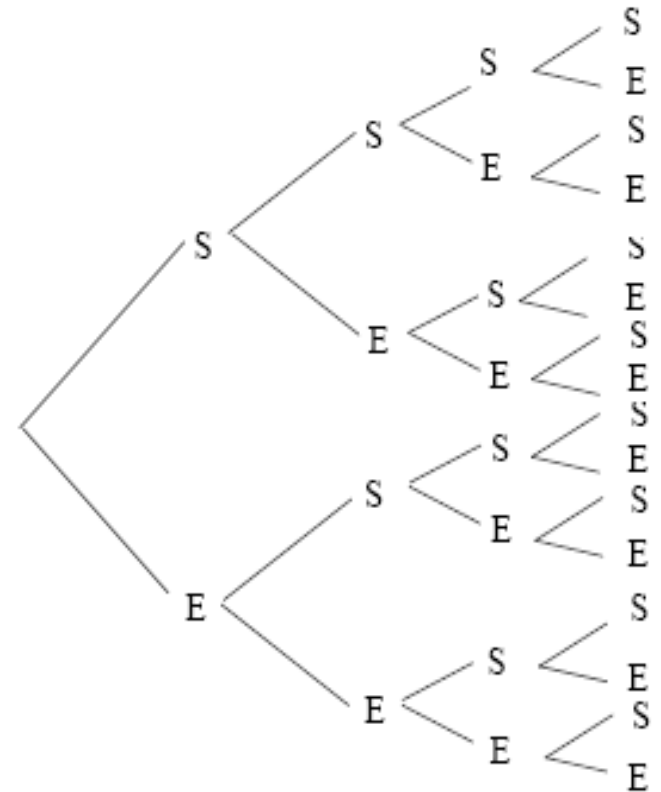
Il n'est pas inintéressant de solliciter d'abord une réponse a priori, c'est une façon d'entrer dans le problème et de motiver son étude.

Loi binomiale

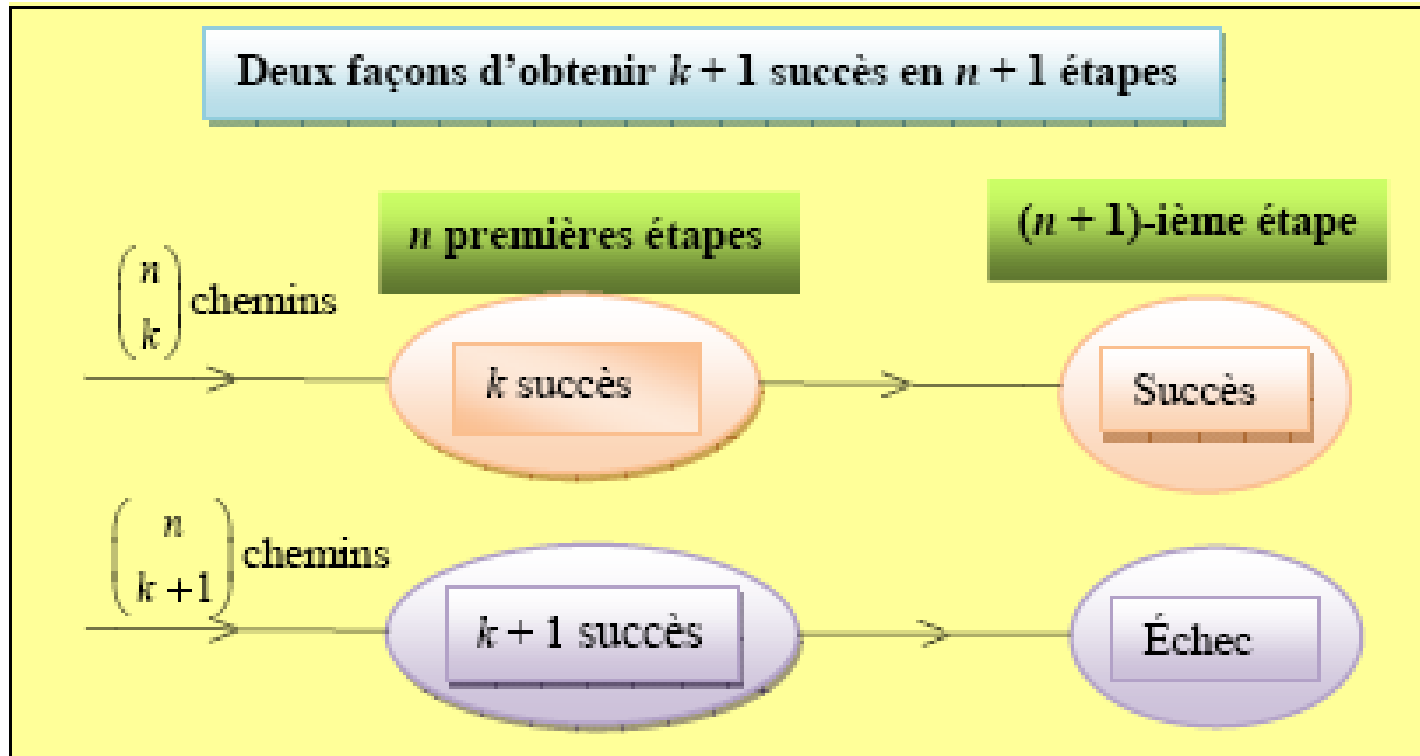
- Il est recommandé de faire découvrir la loi à partir d'un arbre pour une petite valeur de n (4)

- La notation $\binom{a}{b}$ qui se lit « 1 parmi 4 » désigne le nombre de chemins qui conduisent à 1 succès.

- Les nombres de chemins $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux, obtenus à l'aide calculatrice ou tableur



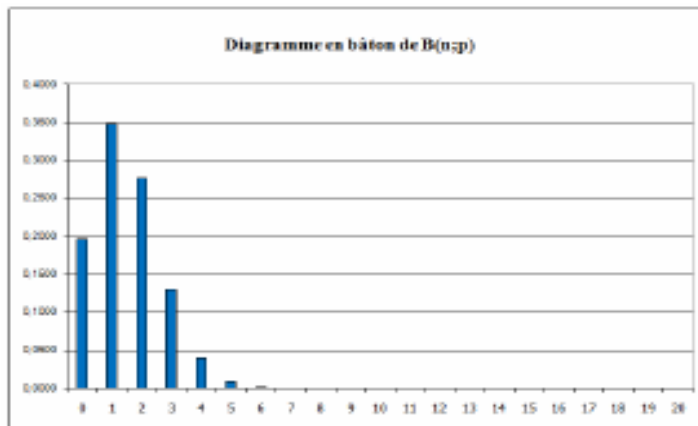
Propriété d'additivité des coefficients binomiaux et triangle de Pascal (en S seulement)



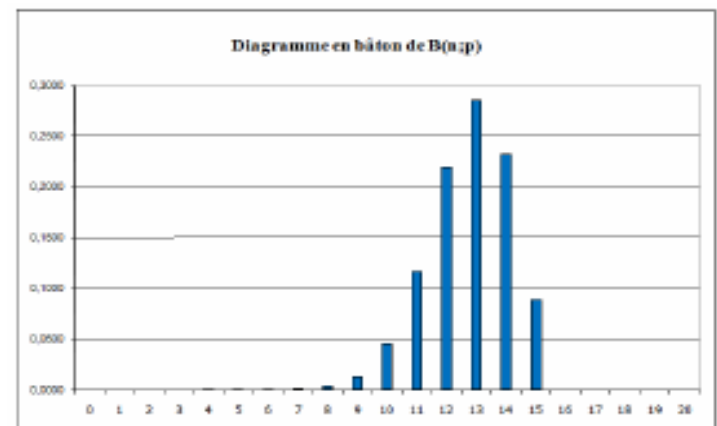
Somme des coefficients binomiaux

Représentations graphiques

Petites binomiales

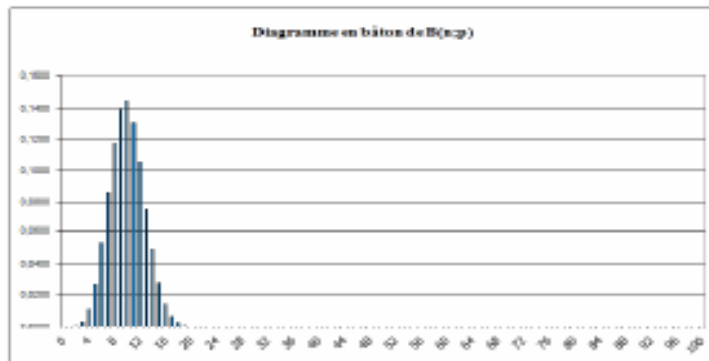


$$n = 10 ; p = 0,15$$

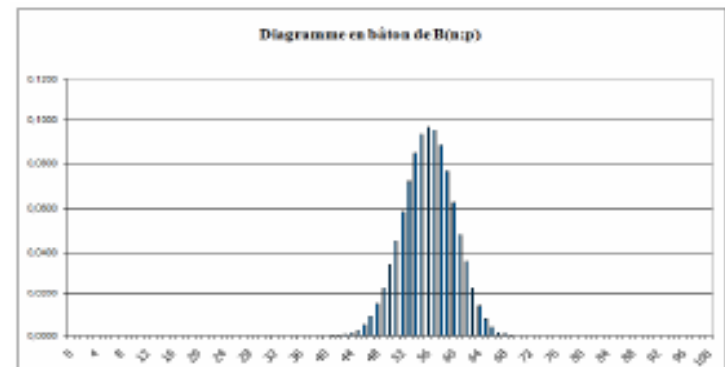


$$n = 15 ; p = 0,85$$

Grandes binomiales



$$n = 40 ; p = 0,25$$



$$n = 80 ; p = 0,85$$

Exemple

Lancers de pièce

On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus.

- Envisager les cas $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$.
- Donner d'abord, sans calcul, une estimation spontanée du résultat, puis solliciter la calculatrice ($n = 10$) ou un algorithme de calcul ($n = 100$ et $n = 1000$).

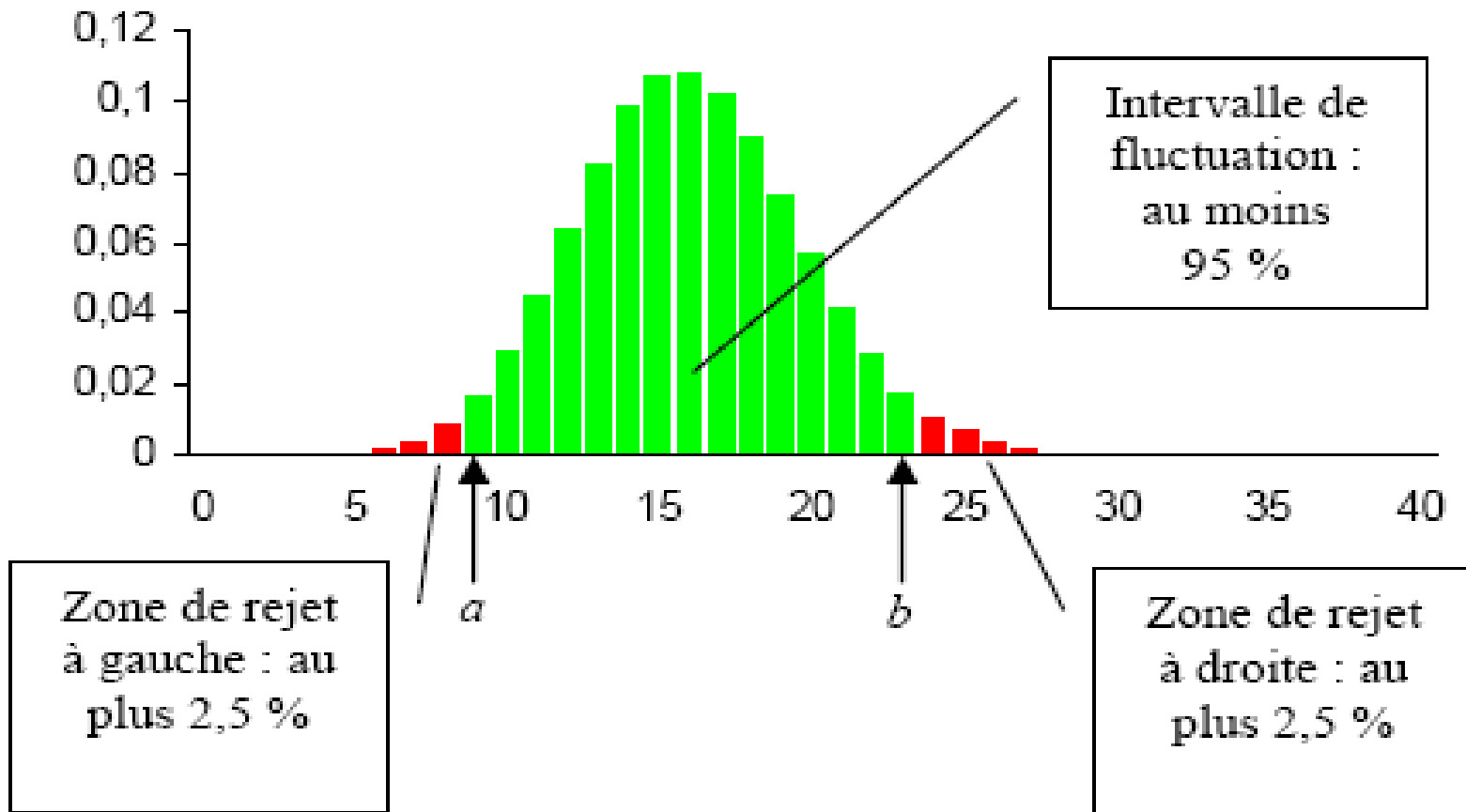
Intervalle de fluctuation avec la loi binomiale

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence F , correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , de la variable aléatoire X (égale à nF) de loi binomiale de paramètres n et p , est l'intervalle $[a/n ; b/n]$, défini par le système de conditions suivant :

- a est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leq 0,025$,
- b est le plus petit entier tel que $P(X > b) \leq 0,025$.

Calcul de l'intervalle de fluctuation

X suit la loi $\mathcal{N}(100 ; 0,16)$



Prise de décision avec la loi binomiale

Hypothèse :
la proportion est p .

Échantillon taille n
Observation :
fréquence f

La règle de décision adoptée est la suivante :

- si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ;
- sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p .

Exemple

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison.

Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine.

Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l'accusé.

En vous situant dans le rôle de cet expert, pouvez-vous décider si les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurys de ce comté ?