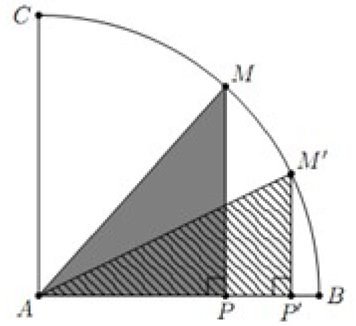
Aire maximale du triangle inscrit dans un quart de cercle
Nouveau programme de seconde

Enoncé (Brut) On considère la configuration plane suivante : ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec AB = AC = 5cm. P étant un point mobile du segment [AB], le point M est sur le quart de cercle de centre A tel que APM soit un triangle rectangle en P.	

Remarque 1 : Il est tout à fait possible d'habiller cet énoncé sous la forme d'une voile à tendre (avec le sommet M qui glisse sur un arceau métallique) pour faire la plus grande "ombre possible".

Remarque 2 : Deux possibilités d'exploitation TICE (exemples en parallèle) pour gérer les aspects géométriques/graphiques/formels.
GeoGebra + Logiciel de calcul formel (type TI89 / TIinspire / Derive) ou la totalité sur Xcas.

Remarque 3 : Problème à gérer de façon filée et sur plusieurs séances.

Propositions

Questionnement proposé : On cherche la position du point P pour que l'aire du triangle APM soit maximale.

Etape 1 : Recherche d'une solution géométrique approchée (Xcas / Géogébra)
Travail en demi-groupe (une heure)

Etape 2 : Approche par la courbe de l'aire de APM en fonction de AP (Xcas / Géogébra)
Travail en demi-groupe (une heure)

Etape 3 : Recherche d'une solution approchée précise puis de la solution exacte (Xcas / TI89)
Travail en classe entière ou en demi-groupe (une heure)

Prolongement possible : Devoir maison
Construction et démonstration géométrique

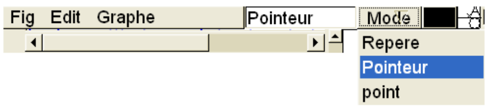
Etape 1 :

Recherche d'une solution géométrique approchée sur Xcas (fichier…) ou Géogébra
L'arc de cercle et les points A,B et C sont déjà tracés et les commandes qui permettent de les tracer sont écrites.
Le fichier a été préparé à l'avance et ainsi les premiers exemples de commandes sont visibles.

1. **Préciser les constructions (dans l'ordre) qu'il reste à réaliser et effectuer les.**

Appeler le professeur pour vérifier votre construction

2. **Réaliser les mesures nécessaires pour répondre au problème et proposer une solution.**



Appeler le professeur pour vérifier votre construction

Question 1 : indications Xcas
Pour toute création d'objet, la rédaction est du type NOM := commande(…)
Par exemple, on pourra s'aider des commandes segment(point,point) / element(objet) / perpendiculaire(point,segment) / inter(objet,objet) / triangle(point,point,point)…
Attention à ne pas se priver de l'AIDE si besoin…

La précision de l'ordre des constructions est de nature **algorithmique** (programme de construction).
La nécessité de choisir P point mobile sur le segment souligne que l'aire **dépend** bien de la distance AP.

Une difficulté technique sur Xcas : deux points M sont créés, il faut donc choisir le "bon" avec [0].

Les élèves plus en difficulté seront aidés sur les commandes Xcas afin de leur assurer du temps au départ pour élaborer un schéma de construction.

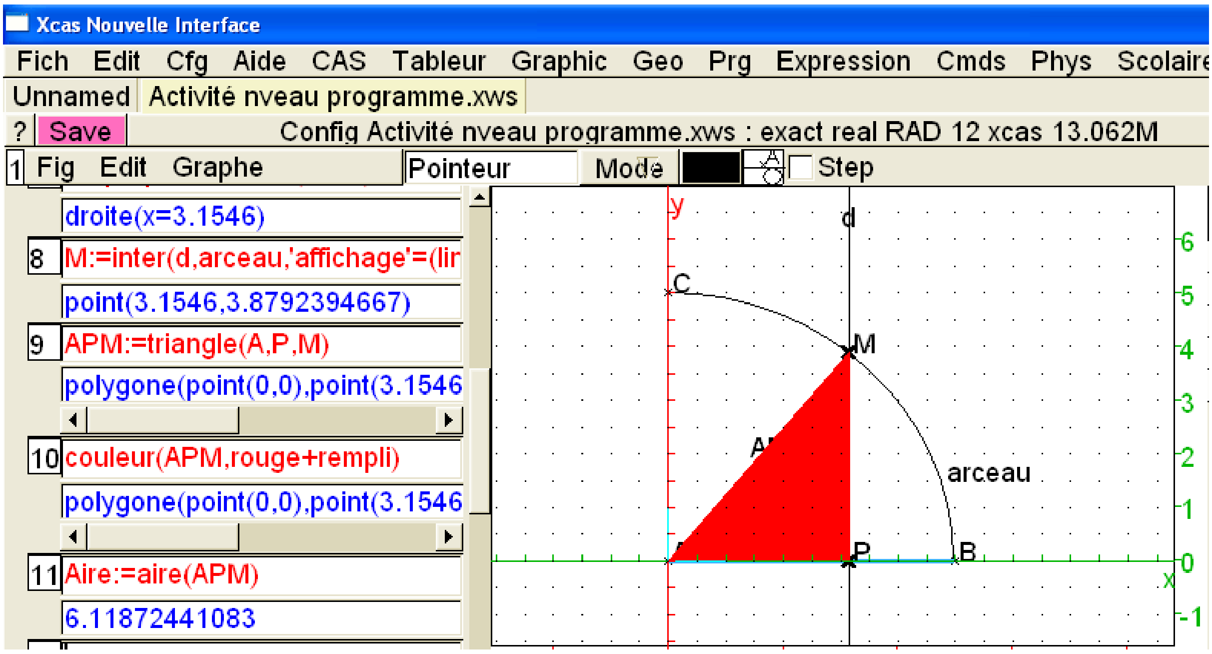
Question 2 :
Penser au Pointeur si vous souhaitez déplacer des points…
On veille à ce que les élèves n'aient pas de problème d'ordre technique.

On rédige alors une **conjecture graphique** et l'on précise bien que nous donnons des valeurs approchées (tous les élèves ont-il la même ? quelle est la meilleure ? avec la notion de maximum qui est retravaillée à cette occasion)

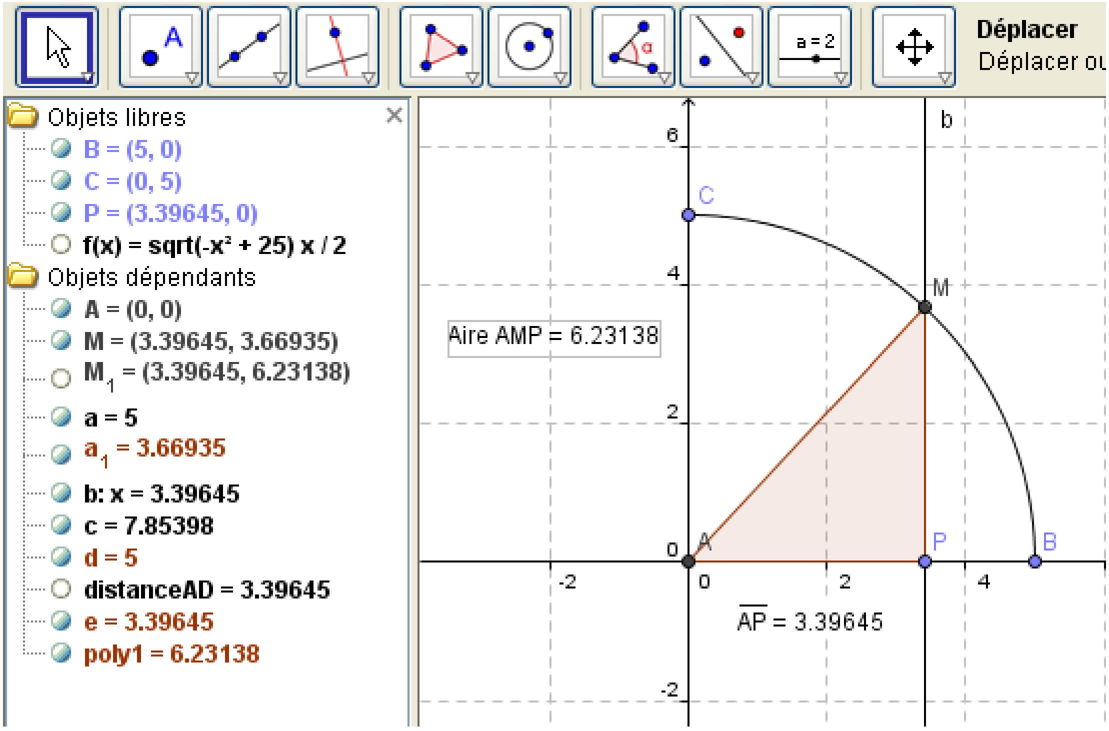
Pour les plus rapides, on leur propose de créer un tableau de valeurs donnant l'aire de APM en fonction de AP… Puis de placer les points correspondants sur la figure…
Une ébauche de courbe apparaît.

<u>Etape 1</u> :

<u>Sur Xcas</u>



<u>Sur géogébra</u>



<u>Etape 2</u> : Aire(APM) en fonction de AP/Approche par la courbe et lectures graphiques…

On souhaite tracer la courbe représentative de l'aire de APM qui dépend de la distance AP et déterminer pour quelles valeurs de AP, le triangle APM mesure quatre unités d'aire…

Travail collectif :
En préambule, on fait une lecture de coordonnées de points pour créer un tableau de valeurs et on valorise les élèves les plus en difficulté (avec vidéoprojecteur et mouvement de P réalisé par un élève au tableau…) On récupère aussi les coordonnées déterminées par les plus rapides dans l'étape 1.

On crée certains points de la future courbe. Cette démarche justifie la création du point N suivant…

1. **a. Construire le point N qui a la même abscisse que P et dont l'ordonnée est l'aire de APM.**
   b. Pour tracer la courbe, modifier l'instruction courbe:= lieu(point sur la courbe, point mobile dont il dépend)… Etes-vous certain d'avoir tracé la bonne courbe ? Justifier.

2. **Par lecture, déterminer pour quelles valeurs de AP, le triangle APM mesure 4 unités d'aire…**

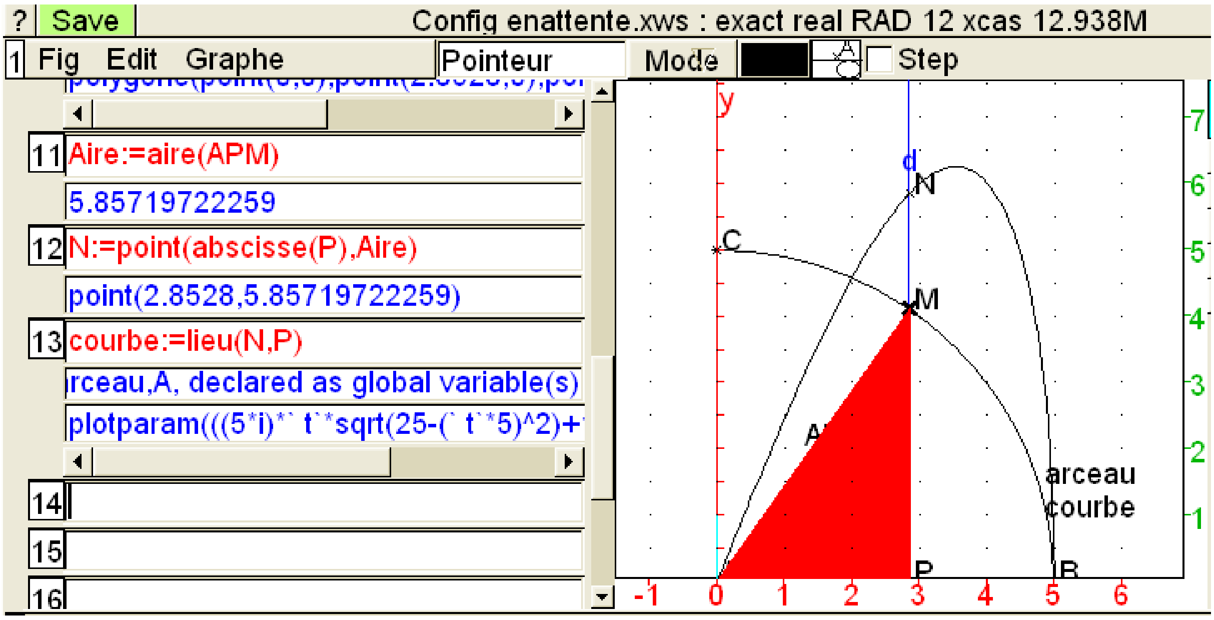
Question 1 :
On vérifie ainsi que les élèves ont bien saisi la dépendance de l'aire à la distance AP.
On aura une vérification claire que la courbe a été bien tracée si les points précédemment créés s'y trouvent.

Question 2 :
Lectures graphiques d'images (4) et d'antécédents + repérage.
On peut demander une certaine précision (démarche algorithmique : voir étape 3) pour les antécédents de 4 unités d'aires.
On peut aussi envisager de décrire les variations de la fonction par lecture graphique (ce qui renforce l'idée de l'existence du maximum)…

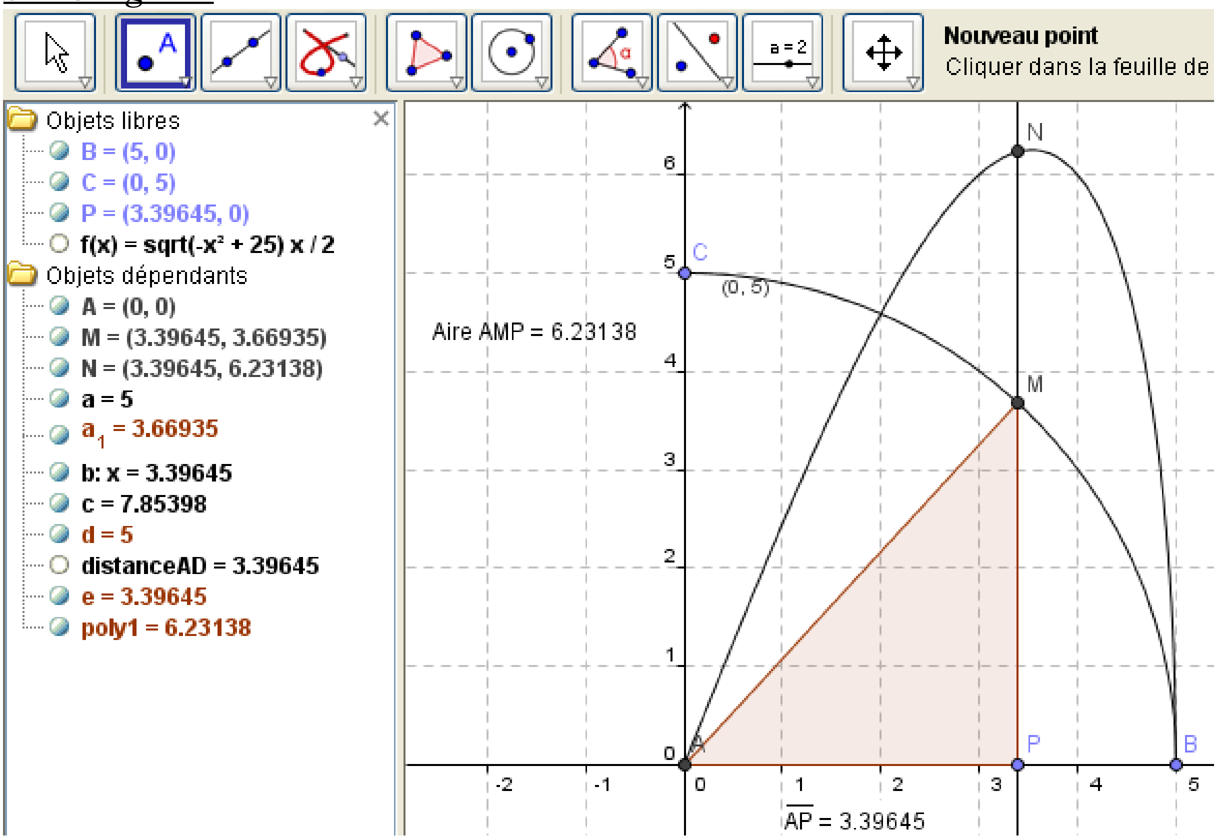
On peut demander aux plus rapides une précision maximale…
On pourra ainsi évoquer l'impossibilité de trouver par ce raffinement la solution exacte.
On peut alors leur demander de déterminer l'équation de la courbe en nommant x la distance AP…
(On peut laisser ce travail en devoir pour la séance qui suivra et où on s'engagera dans l'étape 3)

Etape 2 :

Sur Xcas



Sur Géogébra



<u>Etape 3</u> : Recherche d'une bonne solution approchée du Pb puis de la solution exacte au Pb de départ…

Voir si les plus rapides ont trouvé ou pas l'équation de la courbe à la fin de l'étape 2.
Les élèves se destinant à une série scientifique devraient à cette occasion se montrer à l'aise avec les calculs littéraux mis en place (on peut alors relever quelques feuilles pour une évaluation)

1. **Déterminer l'équation de la courbe à l'aide du logiciel puis définir la fonction AIRE correspondante.**

2. **a. Déterminer alors la position du point P qui donne la plus grande aire du triangle APM.**
b. Déterminer l'aire maximale du triangle APM.
c. Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux trouvés dans la partie 1 ?

Question 1 :
*Attention **seul Xcas permet d'obtenir l'expression de la fonction** à partir du tracé de la courbe (comme lieu du point N)…*
Les propositions des élèves sur l'expression littérale sont alors entérinées ou pas…
Les élèves manquant d'assurance dans les calculs littéraux peuvent continuer quand même l'activité…
L'expression "simplifier" permettra aux élèves moins à l'aise de réécrire l'expression littérale

A défaut sur Géogébra, on a la possibilité simplement de superposer la courbe dont l'équation a été recherchée par certains avec le lieu du point P pour valider le calcul de l'équation de la courbe.

Question 2 a.
On peut sur le logiciel de géométrie ou même avec l'expression de la fonction Aire et sa courbe tracée sur calculatrice chercher une valeur précise de la position du point P qui renvoie le maximum de l'aire de APM. Pour cela, les élèves ont naturellement une **démarche algorithmique** avec des zooms successifs qu'il est opportun de traduire en algorithme :

Entrée : Dessiner la Courbe autour du sommet de la courbe.
Donner la précision souhaitée de l'abscisse du sommet (affecter à) p
Traitement : Tant que l'écart Xmax –Xmin de la fenêtre est supérieur à la précision p
Effectuer un Zoom de la fenêtre graphique autour du sommet
Fin du Tant que
Sortie : Afficher l'intervalle [Xmin;Xmax] qui fournit un encadrement de l'abscisse de P recherchée.

Bien entendu cet algorithme est très proche de l'algorithme de recherche d'une racine d'équation par dichotomie….

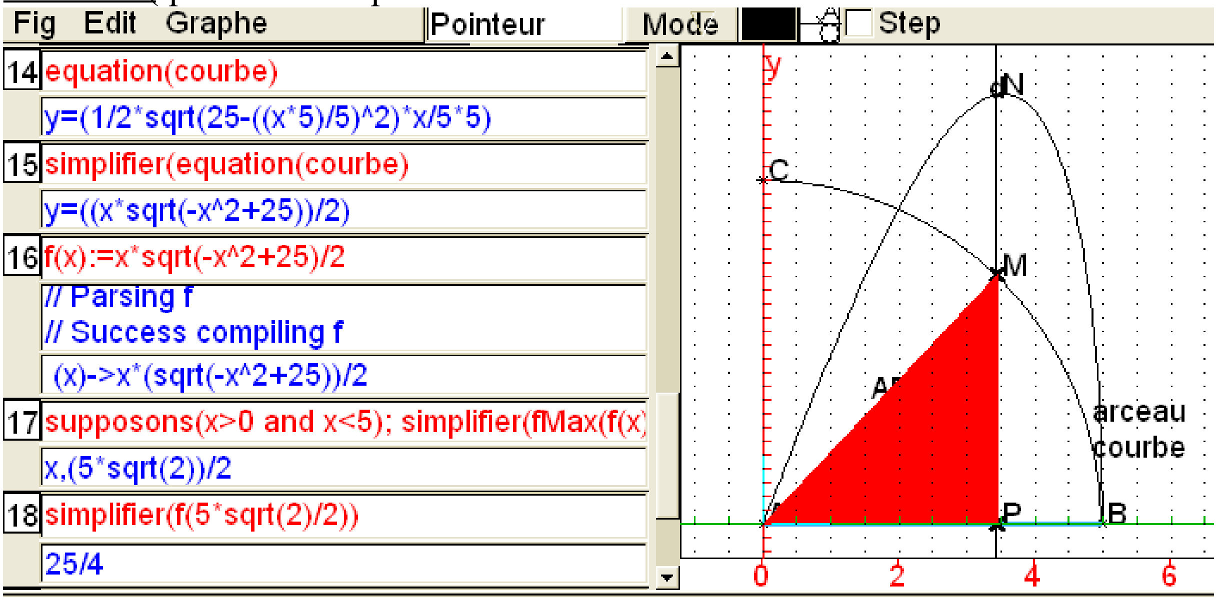
On peut enfin demander à Xcas ou à la TI89 de donner la valeur exacte de l'abscisse de P.
Utiliser pour cela sur Xcas l'instruction fMax et préciser tout d'abord l'ensemble de définition (avec deux inégalités et le bon connecteur logique) en complétant
Assume(x>… …… x<…); fMax(…………)
On en profite pour rappeler la notion d'ensemble de définition et travailler le connecteur logique ET pour indiquer par deux inégalités l'appartenance à l'intervalle [0;5].

Sur TI89, définir la fonction puis utiliser la commande fMAX…qui renvoie l'antécédent du maximum sur l'ensemble des réels…

Question 2 b./c.
Calculs d'image (calcul numérique) pour déterminer l'aire correspondant à $x = 5\sqrt{2}/2$.
Question de cohérence de la solution exacte avec toutes les mesures ou lectures graphiques faites avec les valeurs exactes.

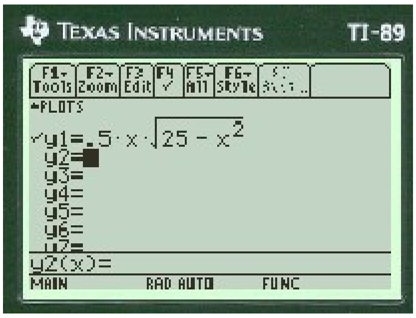
Etape 3 :

Sur Xcas (qui fournit l'équation de la courbe et donc l'aire de APM en fonction de x)

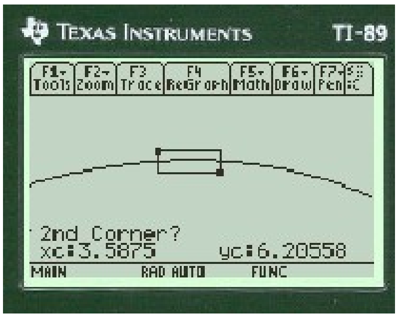


Sur TI89 (où l'on définit l'aire de APM à partir des recherches des élèves)

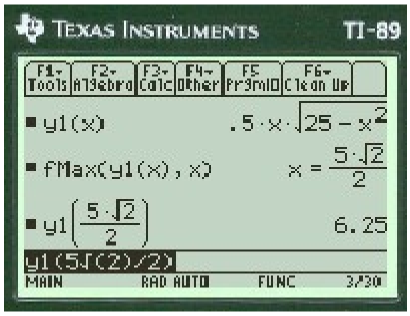
Définition de la fonction



Algo zooms successifs



Détermination de AP et de l'aire maximale

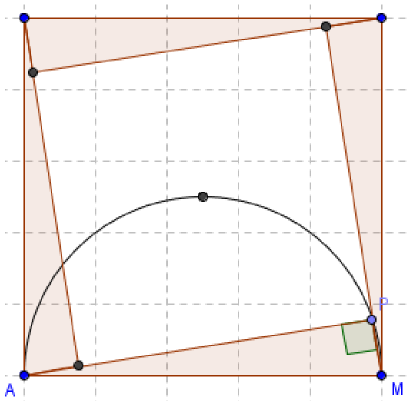


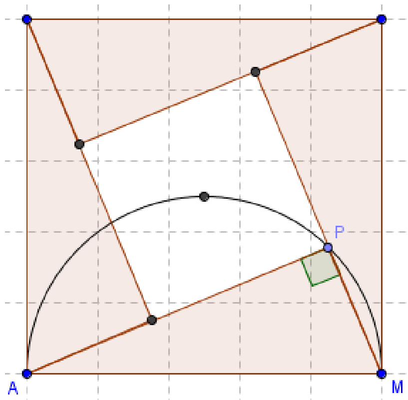
PROLONGEMENT POSSIBLE :

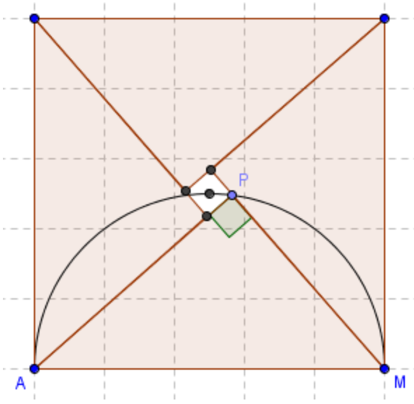
On peut demander la construction exacte du triangle APM d'aire maximale (avec la diagonale d'un carré bien choisi, on tracera aisément la longueur AP de $5\sqrt{2}/2$ qui convient).

De plus, on a cherché en réalité la configuration qui donne le maximum de l'aire d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse [AP] mesure 5 centimètres…

La contemplation de ces figures fournit une démonstration simple mais extrêmement intelligente de la position de P recherchée et de la valeur maximale de l'aire de APM dont on peut demander la construction en DM.







Alors quelle position du point P (quelle longueur AP maximise l'aire du triangle APM ?